3 Zahlen

Versuchen Sie bitte einmal, sich Ihr Leben ohne Zahlen vorzustellen. Ich glaube nicht, dass Ihnen das auch nur ansatzweise gelingen wird. Zahlen bestimmen unser Leben, von unserem Geburtsdatum ab, über die Mengenangaben unserer Nahrungsmittel bis zu unserem Kontostand bei der Bank. Dabei sind Zahlen eine erstaunliche Abstraktionsleistung, denn sie ermöglichen uns, Dinge zu beziffern und damit berechenbar zu machen. Wir behaupten zum Beispiel, dass wir fünf Finger haben oder dass drei Äpfel in einer Schale liegen. Und das, obwohl diese Finger oder Äpfel ganz gewiss nicht alle gleich aussehen. Beim Zählen blenden wir nämlich jeweils alle Unterschiede zwischen den verschiedenen Objekten so weit aus, dass wir sie unter einem Begriff als gleichartig betrachten können. Erst durch diesen Trick sind wir in der Lage, Dinge zu zählen.

Die Menschheit hat im Laufe ihrer Geschichte verschiedene Zahlensysteme entwickelt. Unser heutiges *Dezimalsystem,* das Zehnersystem, hat sich gegenüber den anderen durchgesetzt, weil es am praktischsten ist. Mit ihm lässt sich beispielsweise viel besser rechnen als mit römischen Ziffern. Dabei ist das Dezimalsystem nichts anderes als eine bequeme Kurzschreibweise. Wenn wir mit eins anfangen zu zählen und bei zehn ankommen, so benutzen wir für die 10 keine eigene Ziffer mehr. Wir nehmen statt dessen wieder die 1, verschieben diese um eine Stelle nach links, und füllen die rechte Seite sodann mit einer 0 auf.

Mit dieser Schreibweise können wir auch sehr große Zahlen exakt und gleichzeitig kompakt aufschreiben: $573 = 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3$. Niemand möchte es hier mit einem System zu tun bekommen, in dem 573 durch ein eigenes Zeichen dargestellt wird oder vielleicht sogar durch 573 Punkte, die abgezählt werden müssen.

Die Zahl Null machte diese Schreibweise erst möglich. Sie stellt den Gipfel der Abstraktion dar, denn sie bezeichnet etwas, das gar nicht vorhanden ist. Wenn unsere Schale ganz leer ist und wenn wir wirklich darauf Wert legen, so können wir auch feststellen, dass sich gerade null Äpfel darin befinden. Im Prinzip ist das aber fast schon absurd, denn es ist ja gar kein Apfel da.

Weitere Geheimnisse hat das Dezimalsystem nicht aufzuweisen. Viele andere Schreibweisen sind denkbar und werden beispielsweise in der Informatik auch verwendet. Dass wir genau bei der Zehn einen Sprung zur nächsten Ziffer machen, liegt nur an unseren zehn Fingern. Hätten wir dagegen acht Finger, würden wir sicherlich im Achtersystem rechnen. Und könnten wir nicht so leicht unsere beiden Hände nebeneinander halten, so würden wir vermutlich im Fünfersystem zählen.

Bisher haben wir nur vollständige, also *ganze Zahlen* betrachtet. Wir können einen Apfel aber auch zerteilen, zum Beispiel in vier gleich große Stücke. Dann besteht jedes Stück nur noch aus ¼ oder 0,25 Apfel. Für Bruchteile von ganzen Zahlen, den sogenannten reellen Zahlen, geht man üblicherweise zu einer Kommaschreibweise über. Nicht nur links vom Komma, das wir bei den ganzen Zahlen gar nicht mitgeschrieben haben, sondern auch rechts davon wird im Dezimalsystem gerechnet: 0,25 = 0×1 + 2×1/10 + 5×1/100. Probleme macht diese Schreibweise allerdings bei Zahlen, die man so nicht vollständig hinschreiben kann, weil man dazu unendlich viel Platz bräuchte. Dies gilt beispielsweise für viele Brüche wie 1/3 oder 1/7.

Die Mathematik kennt weitere Arten von Zahlen, die sich in keinem denkbaren Zahlensystem exakt notieren lassen. Das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser, die Zahl π (Pi = 3,14159…), ist solch eine irrationale Zahl. Sie lässt sich nicht als Bruch darstellen. Eine Rechenvorschrift, wie π zu ermitteln ist, kann man allerdings in wenigen Zeilen aufschreiben. Aber diese Vorschrift verrät einem nicht direkt, welche Ziffer beispielsweise an der 573. Stelle von π steht. Wenn wir das wissen wollen, so bleibt uns nichts anderes übrig, als alle 573 Stellen nach dem Komma auszurechnen. Eine Abkürzung für diese Fragestellung gibt es nicht.

Diesem Muster werden wir noch öfter begegnen: Zwar kennen wir eine vollständige Formel zur Berechnung einer Größe, aber sie nützt uns häufig nur etwas in einem begrenzten Umfang. Hier bei der Berechnung von π ist das direkte Ausrechnen einer bestimmten Stelle nicht möglich. Und dies liegt nicht daran, dass wir eine solche Formel noch nicht gefunden hätten. Vielmehr sind sich die Mathematiker sehr sicher, dass es diese Formel einfach nicht gibt. Nicht einmal in der abstrakten Zahlenwelt der Mathematik haben also alle Fragen eine auch direkte Antwort.

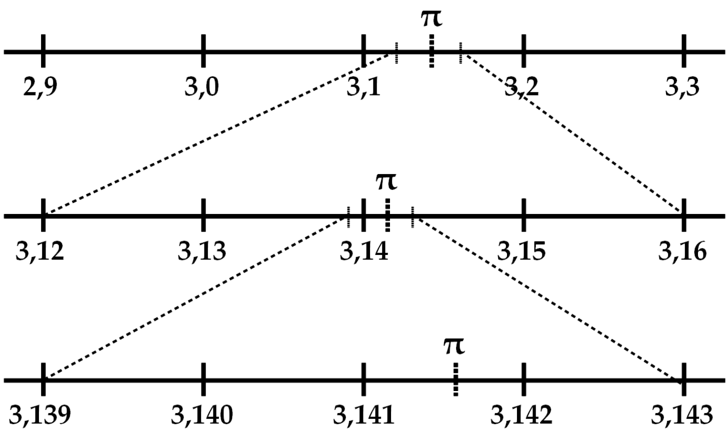
Bildlich gesehen liegen zwischen zwei ganzen Zahlen jeweils unendlich viele *Kommazahlen* dicht gepackt nebeneinander. Zwischen 3 und 4 befinden sich nicht nur π, 3¼ und 3½, sondern unendlich viele weitere Zahlen. Selbst wenn wir uns zwei ganz eng beieinanderliegende Zahlen vorstellen, so können wir doch jederzeit in Gedanken die Vergrößerung unseres Bildes erhöhen. Dadurch finden wir zwischen zwei Kommazahlen stets unendlich viele weitere Kommazahlen.

Aber gilt dieses mathematische Verhalten auch für physikalische Größen? Kann man beispielsweise den Abstand zwischen zwei Objekten beliebig verkleinern? Kann man etwa den Ort eines Objekts mit einer unendlichen genauen Präzision bestimmen? Existiert dieser Ort überhaupt mit einer unendlichen Genauigkeit oder gibt es in der Natur Beschränkungen, die nicht durchbrochen werden können? Wir wenden uns später diesen interessanten Fragen zu, doch möchte ich hier schon so viel vorwegnehmen: Nicht alles, was prinzipiell denkbar ist, muss sich auch so in der Natur wiederfinden.

Die bisherige einfache Kommaschreibweise ist leider für ein wissenschaftliches Arbeiten meist unbrauchbar. Wenn es in der Physik oder Astronomie wirklich um kleine oder große Abstände geht, dann wird diese Schreibweise sehr schnell unhandlich. Die Größe eines Atoms liegt zum Beispiel im Bereich von 0, 000 000 000 1 Meter. Obwohl ich die Nullen schon in Dreiergruppen zusammengefasst habe, ist es mühsam und fehleranfällig ihre Anzahl festzustellen. Noch schlimmer wird es, wenn man zwei Größen dieser Art vergleichen möchte. Die Zahlen sehen zwar oftmals beeindruckend aus, aber der Blick auf das Wesentliche geht verloren. Man sieht sozusagen die Zahlen vor lauter Nullen nicht mehr. Zur Vermeidung dieser Nachteile hat sich daher eine weitere Kurzschreibweise eingebürgert, die ich im Folgenden auch verwenden möchte.

Mit der *Exponentialschreibweise* lassen sich viele Zahlen ganz leicht lesen und einschätzen. Die obige, sehr kleine Zahl mit der Eins an der 10. Stelle nach dem Komma wird so zu 10^{-10} (gesprochen: 10 hoch minus 10). Jeder kann sofort sehen, dass hier 10 Stellen nach dem Komma im Spiel sind. Genauso leicht geht dies auch mit großen Zahlen. Die Entfernung zu unserem nächsten Nachbarstern beträgt ziemlich genau 40 000 000 000 000 Kilometer. Abgekürzt sind das $4{\times}10^{13}$ km. Die Stellen vor dem Komma werden positiv, die nach dem Komma negativ gezählt. Wir können somit auf den ersten Blick die Größenordnung von Zahlen erfassen.

Den Begriff der *Größenordnung* benutzen Physiker übrigens auch noch in einem strengeren Sinn. Wenn sich zum Beispiel zwei Messgrößen um einen Faktor 2000 = $2{\times}10^3$ unterscheiden, so beträgt der Unterschied für einen Physiker in etwa 3 Größenordnungen. Man rundet zur nächsten Zehnerpotenz auf oder ab, lässt die 10 ganz einfach weg und beschränkt sich nur auf den hochgestellten Exponenten.



2 Zwischen zwei Kommazahlen liegen immer beliebig viele weitere reelle Zahlen.

Diese erneute Abkürzung mag Ihnen eventuell übertrieben erscheinen, aber für grobe Abschätzungen ist sie äußerst nützlich. Der Unterschied zwischen dem Durchmesser eines Atoms und der Distanz zu dem Stern macht demnach 23 Größenordnungen aus. Wir sparen uns auf diese Weise auch das Lernen von Zahlennamen und reduzieren unsere Ausdrucksweise wieder einmal auf das Wesentliche. Immerhin gibt es in der Physik Beispiele, wo sich Zahlen um mehr als unvorstellbare 120 Größenordnungen unterscheiden, also um eine Zahl mit 120 Nullen.

Physiker und Astronomen werden immer wieder gefragt, wie sie mit diesen kleinen beziehungsweise großen Zahlen zurechtkommen. Mir persönlich helfen da vor allem zwei Dinge: Vergleiche und Gewöhnung. Zum Beispiel gibt es ein wunderschönes Bild, mit dem man sich die Größe von Atomen veranschaulichen kann. Ein kleiner Apfel verhält sich zur gesamten Erde ungefähr genauso wie ein Atom zu dem gesamten Apfel. Mit solch griffigen Vergleichen kann man sich über viele Größenordnungen hinweg hangeln. Die zweite Hilfe ist die Gewohnheit, die nach einiger Zeit unweigerlich aufkommt, wenn man sich gedanklich ständig in exotischen Bereichen tummelt. Die Zahlen, mit denen man es täglich zu tun hat, werden mit der Zeit immer ganz normal.

Auch Sie, liebe Leser, haben sich mittlerweile an Größenordnungen gewöhnt, die Sie sich eigentlich nicht richtig vorstellen können. Wenn Sie mir das nicht glauben, so denken Sie bitte an die Speicherkapazität der Festplatte Ihres Computers. Sie bemisst sich heute typischerweise in Hunderten von Gigabyte, also mehr als hundertmal eine Milliarde Bytes. Mit der abgekürzten Schreibweise sind das $100 \times 10^9 = 10^{11}$ Byte. Wir alle gehen wie selbstverständlich mit diesen Zahlen um, aber anschaulich sind sie deshalb nicht unbedingt.

Eine physikalische Größe ist stets mit einer *Maßeinheit* verknüpft. Eine Länge wird immer in Metern und eine Masse stets in Kilogramm gemessen. Ohne diese Maßeinheiten wüssten wir nicht, womit wir es zu tun haben. Stellen Sie sich vor, Sie fragen jemanden in einer fremden Stadt, wie weit es zum Bahnhof ist. Falls er nur »drei« antworten sollte, werden Sie sich vielleicht fragen, ob er damit drei Kilometer, drei Minuten zu Fuß oder aber drei Straßenzüge meint. Obwohl sich die Einheiten oft aus dem Zusammenhang erschließen, sollte man sie dennoch nie weglassen, da die Zahlenwerte für Messgrößen erst durch die entsprechenden Einheiten ihre eigentliche Bedeutung erhalten.

Während meiner Diplomarbeit habe ich dahin gehend einmal ein ziemliches Durcheinander erlebt. Physiker verschiedener Nationen haben zusammen ein Laserexperiment mit etlichen optischen Komponenten wie Linsen und Spiegeln aufgebaut. Da die Kosten auf verschiedene Institute aufgeteilt werden sollten, wurden mehrere Bestellungen aufgegeben. Die Deutschen und Russen haben alles mit der Aufschrift in Zentimetern bestellt, aber die Bauteile der Amerikaner waren in Zoll beschriftet. Das Umrechnen war zwar klar definiert, musste aber immer wieder vorgenommen werden und war entsprechend ärgerlich.

Zum Abschluss dieses Kapitels möchte ich Ihnen die gebräuchlichsten Zahlennamen und Vorsilben beziehungsweise Buchstaben für Maßeinheiten auflisten. Wir verwenden sie oft im Alltag, sind uns aber nicht immer sicher, was sie tatsächlich bedeuten.

Zahl	Name	Vorsilbe	Buchstabe
10^{15}	Billiarde	Peta	P
10^{12}	Billion	Tera	T
10^{9}	Milliarde	Giga	G
10^{6}	Million	Mega	M
10^{3}	Tausend	Kilo	k
$10^{0} = 1$	Eins		
10^{-3}	Tausendstel	Milli	m
10^{-6}	Millionstel	Mikro	µ
10^{-9}	Milliardstel	Nano	n
10^{-12}	Billionstel	Piko	p
10^{-15}	Billiardstel	Femto	f

Ein Kilometer sind also lediglich 1000 Meter und keine neue Einheit, was mir als Kind beispielsweise lange nicht klar war. Nanotechnologie handelt von Bauteilen mit Abmessungen im Bereich von 10^{-9} Metern. Wenn wir auf dem Markt gehen und dagegen ein Kilo und nicht ein Kilogramm Äpfel verlangen, so ist das eine umgangssprachliche Nachlässigkeit, die wirklich jeder versteht. Wenn der Verkäufer allerdings pedantisch sein sollte, so könnte er uns fragen, ob wir wirklich 1000 Äpfel mit nach Hause tragen möchten?